

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a XII-a

1. Fie (G, \cdot) grup multiplicativ și $f, g : G \rightarrow G$, $f(x) = x^{2009}$, $g(x) = x^{2010}$ morfisme de grup. Știind că f este morfism surjectiv să se arate că (G, \cdot) este grup abelian.

2. Se consideră mulțimea:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

și matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} \in M$. Să se rezolve în M ecuația $X^6 = A$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln x \cdot \cos \frac{1}{x} & , x > 0 \\ m & , x = 0 \end{cases} \quad \text{să admită primitive.}$$

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât
 $f(x) - f(y) = (x - y) \cdot f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcția f este identic nulă.

www.mategl.com

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte